研究ノート

p-調和関数と Tug-of-War ゲーム

竹 内　　博

Notes on p-harmonic Functions and Tug-of-War Games

Hiroshi TAKEUCHI

ABSTRACT

In this note we will discuss the p-harmonic functions and tug-of-war games.

KEYWORDS : p-harmonic functions, tug-of-war games

1　p-harmonious function

次の等式を満たす $\boldsymbol{R}^n$ 上の関数 u_ϵ を考える。また $1<p\leq\infty$ とする。

$$u_\epsilon(x)=\frac{\alpha}{2}\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x)} u_\epsilon+\inf_{\overline{B}_\epsilon(x)} u_\epsilon\}+\frac{\beta}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x)} u_\epsilon(y)\,dy \tag{1}$$

ここで $\epsilon>0$ であり，α，β は $\alpha+\beta=1$，かつ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(p-2)}{(n+2)}$ を満たす。よって

$$\alpha=\frac{p-2}{p+n},\quad \beta=\frac{2+n}{p+n} \tag{2}$$

となり $\alpha=0$，$\beta=1$ は $p=2$ に相当し，$\alpha=1$，$\beta=0$ は $p=\infty$ に相当する。$2\leq p\leq\infty$ は $0\leq\alpha\leq1$ に相当し，$1<p\leq2$ は $-1/(n+1)<\alpha\leq0$ に相当する。セクション 1，2 では $\alpha\geq0$ を考える。またここで，$B_\epsilon(x)$ は $\boldsymbol{R}^n$ 内の中心 x，半径 $\epsilon>0$ の開ユークリッド球で，その閉包

$$\overline{B}_\epsilon(x)=\{y\in\boldsymbol{R}^n:|y-x|\leq\epsilon\}$$

を表し，$|B_\epsilon|$ は B_ϵ の体積を表す。この関数 u_ϵ を p-harmonious function と呼ぶ。ある開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 内で以下の 2 人ゼロ和ゲームを考える。まず $\Gamma_\epsilon=\{x\in R^n\setminus\Omega: dist\,(x,\partial\Omega)\leq\epsilon\}\subset\Omega$ に対して $F:\Gamma_\epsilon\to\boldsymbol{R}$ を利得関数として与えておく。一人をプレイヤー 1，他の一人をプレイヤー 2 とする。初期状態 $x_0\in\Omega$ を出発して，確率 α で，コインの表が出たとする，このときさらに公平なコインを投げ，勝者は目的の場所 $x_1\in\overline{B}_\epsilon(x_0)$ に移動する。もし最初のコインが裏ならば（確率 β），一様の確率で $\overline{B}_\epsilon(x_0)$ 内の任意の点 x_1 に移動する。x_1 から同様にこの操作を続け，端点 Γ_ϵ に達するまでゲームを続ける。その結果 x_0，x_1，…を得る。x_k は確率変数となる。

ゲームは最初に $x_\tau\in\Gamma_\epsilon$ に到達したとき終了する。ここで τ は停止時刻を表す。プレイヤー 1 は戦略 S_1 をとり，利得は $F(x_\tau)$ である。プレイヤー 1 はそれを最大化しようとし，プレイヤー 2 は戦略 S_2 をとり利得を最小化しようとするゼロ和ゲームである。ステップ k までのゲームの歴史は $k+1$ ゲームまでのベクトル，$(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ となる。このステップ k までのすべての歴史の集合を H_k と書く。それは長さ k の可能な状態を含む。すべての有限の歴史の集合を次で表す。

$$H=\bigcup_{k=0}^{\infty}H_k$$

2012年12月21日受付，2013年 3 月 6 日最終受付
竹内　博　四国大学経営情報学部
Hiroshi TAKEUCHI, Member (Faculty of Management and Information Science, Shikoku Univ., Tokushima, 771-1192 Japan).
四国大学経営情報研究所年報　No. 18　pp. 29-37　2013年 2 月

プレイヤー1の戦略 S_1 はプレイヤー1がコインを投げ勝った時，次の位置を与える H 上の関数

$$S_1(x_0.x_1,\cdots,x_k)=x_{k+1}\in\overline{B}_\epsilon(x_k)$$

となり，歴史を与える。プレイヤー2に対しても同様に戦略 S_2 を与える。
$\Omega_\epsilon=\Omega\cup\Gamma_\epsilon\subset\boldsymbol{R}^n$ として

$$H^\infty=\Omega_\epsilon\times\Omega_\epsilon\times\cdots,$$

$\omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots)\in H^\infty$ に対して $x_k(\omega)=\omega_k$ とする。$\tau(\omega)=\inf\{k:x_k(\omega)\in\Gamma_\epsilon,k=0,1,2,\cdots\}$ は停止時刻を表す。x_0 から出発し，戦略 S_1，S_2 を使った期待利得は

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)]=\int_{H^\infty}F(x_\tau(\omega))\,dP^{x_0}_{S_1,S_2}(\omega).$$

ここで $\mathbb{E}$ は期待値を表す。プレイヤー1のゲームの値は

$$u^\epsilon_1(x_0)=\sup_{S_1}\inf_{S_2}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)]$$

プレイヤー2のゲームの値は

$$u^\epsilon_2(x_0)=\inf_{S_2}\sup_{S_1}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)]$$

ここで動的計画法を使うことにより，次が言える。
定理1：プレイヤー1のゲームの値 $u^\epsilon_1(x_0)$ は次式を満たす。

$$u^\epsilon_1(x_0)=\frac{\alpha}{2}\left\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x_0)}u^\epsilon_1+\inf_{\overline{B}_\epsilon(x_0)}u^\epsilon_1\right\}+\frac{\beta}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x_0)}u^\epsilon_1(y)\,dy \quad (3)$$

またプレイヤー2についても同様の式を満たす。
さらに次が言える。
定理2：$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ を有界開集合とし，F を Γ_ϵ で与えられた値をもつとする。この時 $u^\epsilon_1=u^\epsilon_2$ が成り立つ。この式が成り立つ時ゲームは値をもつという。

証明：定義から明らかに $u^\epsilon_1\le u^\epsilon_2$ が成立する。$u^\epsilon_2\le u^\epsilon_1$ を示す。プレイヤー2は x_{k-1} で u^ϵ_1 を最小化しようとする点 x_k，をとる戦略 S^0_2 をとる。すなわち固定した $\eta>0$ に対して，

$$u^\epsilon_1(x_k)\le\inf_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})}u^\epsilon_1+\eta 2^{-k},$$

点 x_0 から出発する。u^ϵ_1 の戦略と動的計画法により

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x_0}_{S^0_1,S^0_2}&\left[u^\epsilon_1(x_k)+\eta 2^{-k}\,|\,x_0,\ldots,x_{k-1}\right]\\&\le\frac{\alpha}{2}\left\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})}u^\epsilon_1+\inf_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})}u^\epsilon_1+\eta 2^{-k}\right\}\\&\qquad+\frac{\beta}{|B_\epsilon(x_{k-1})|}\int_{B_\epsilon(x_{k-1})}u^\epsilon_1\,dy+\eta 2^{-k}\\&=u^\epsilon_1(x_{k-1})+\eta 2^{-(k-1)}\end{aligned}\quad (4)$$

よって

$$M_k=u^\epsilon_1(x_k)+\eta 2^{-k}$$

は優マルチンゲール（supermartingale）となる。さらにFatouの補題と任意停止定理（optional stopping theorem）より

$$\begin{aligned}u^\epsilon_2(x_0)&=\inf_{S_2}\sup_{S_1}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)]\\&\le\sup_{S_1}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S^0_2}[F(x_\tau)+\eta 2^{-\tau}]\\&\le\sup_{S_1}\liminf_{k\to\infty}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S^0_2}\left[u^\epsilon_1(x_{\tau\wedge k})+\eta 2^{-(\tau\wedge k)}\right]\\&\le\sup_{S_1}\mathbb{E}_{S_1,S^0_2}[u^\epsilon_1(x_0)+\eta]=u^\epsilon_1(x_0)+\eta.\end{aligned}\quad (5)$$

ここで $\tau\wedge k=\min(\tau,k)$ であり $\eta>0$ は任意なので目的の式を得る。

2　$\boldsymbol{\epsilon\to 0}$ のときの収束

この節で p-harmonious function は $\epsilon\to 0$ のときに p-harmonic function に収束することを示す。

定義1：u が p-harmonic function であるとは $\epsilon \to 0$ で $x \in \bar{\Omega}$ に対し

$$u(x) = \frac{\alpha}{2}\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x)} u + \inf_{\overline{B}_\epsilon(x)} u\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x)} u(y)\,dy + O(\epsilon^3) \quad (6)$$

が成り立つことを言う。

定理3：u を開集合 $\Omega \cup \Gamma_\epsilon \subset \Omega'$ 上の p-harmonic function とする。また $Du \neq 0$ を仮定する。u_ϵ を Γ_ϵ で u に等しい p-harmonious function とする。このとき $\epsilon \to 0$ で u_ϵ は u に $\bar{\Omega}$ で一様に u に収束する。

証明：当面 $p > 2$ すなわち $\alpha > 0$ となる場合を考える。プレイヤー2は x_{k-1} の点で，u を最小化するように x_k をとるように戦略 S_2^0 をとり，$x_k \in B_\epsilon(x_{k-1})$ を選ぶ。よって

$$u(x_k) = \inf_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})} u(y).$$

次に $C_1 > 0$ を $|O(\epsilon^3)| \leq C_1\epsilon^3$ となるようにとる。戦略 S_2^0 により

$$M_k = u(x_k) - C_1 k\epsilon^3$$

は優マルチンゲールになる。実際

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}\left[u(x_k) - C_1k\epsilon^3 | x_0,\ldots,x_{k-1}\right] \\
&\quad \leq \frac{\alpha}{2}\left\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})} u + \inf_{\overline{B}_\epsilon(x_{k-1})} u\right\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon(x_{k-1})|}\int_{B_\epsilon(x_{k-1})} u\,dy - C_1k\epsilon^3 \\
&\quad \leq u(x_{k-1}) - C_1(k-1)\epsilon^3. \quad (7)
\end{aligned}$$

ここで最初の不等号は戦略の選択からきて，2番目の不等号は定義1から来る。次に Fatou の補題と優マルチンゲールに対する任意停止定理を使って u_2^ϵ を評価する。

$$\begin{aligned}
u_2^\epsilon(x_0) &= \inf_{S_2}\sup_{S_1}\mathbb{E}_{S_1,S_2}^{x_0}[F(x_\tau)] \\
&\leq \sup_{S_1}\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}^{x_0}[u(x_\tau)] \\
&\leq \sup_{S_1}\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}^{x_0}[u(x_\tau) + C_1\tau\epsilon^3 - C_1\tau\epsilon^3] \\
&\leq \sup_{S_1}\Big(\liminf_{k\to\infty}\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}^{x_0}[u(x_{\tau\wedge k}) - C_1(\tau\wedge k)\epsilon^3] + C_1\epsilon^3\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}^{x_0}[\tau]\Big) \\
&\leq u(x_0) + C_1\epsilon^3\sup_{S_1}\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}^{x_0}[\tau]. \quad (8)
\end{aligned}$$

この不等式とプレイヤー1に対する同様の式より $u_\epsilon = u_2^\epsilon = u_1^\epsilon$ に対して

$$u(x_0) - C_1\epsilon^3\inf_{S_2}\mathbb{E}_{S_1^0,S_2}^{x_0}[\tau] \leq u_\epsilon(x_0) \leq u(x_0) + C_1\epsilon^3\sup_{S_1}\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}^{x_0}[\tau].$$

$\epsilon \to 0$ にして，もし次が言えれば証明は終わる。

$$\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}^{x_0}[\tau] \leq C\epsilon^{-2}$$

これを示すために

$$\tilde{M}_k = -u(x_k)^2 + u(x_0)^2 + C_2\epsilon^2 k$$

が十分小さな ϵ に対して優マルチンゲールであることを示す。

もしプレイヤー2がコインを投げて勝った時，$Du \neq 0$ より，$C_3 = \inf_{x\in\Omega}|Du|$ として

$$u(x_k) - u(x_{k-1}) \leq -C_3\epsilon$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[((u(x_k) - u(x_{k-1}))^2 | x_0,\ldots,x_{k-1}] \\
&\quad \geq \frac{\alpha}{2}((-C_3\epsilon)^2 + 0) + \beta\cdot 0 = \frac{\alpha C_3^2}{2}\epsilon^2. \quad (9)
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[\tilde{M}_k-\tilde{M}_{k-1}|x_0,\dots,x_{k-1}]\\&=\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[-u(x_k)^2+u(x_{k-1})^2+C_2\epsilon^2|x_0,\dots,x_{k-1}]\\&=\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[-(u(x_k)-u(x_{k-1}))^2|x_0,\dots,x_{k-1}]\\&\quad-\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[2(u(x_k)-u(x_{k-1}))u(x_{k-1})|x_0,\dots,x_{k-1}]\\&\quad+C_2\epsilon^2.\end{aligned}\tag{10}$$

必要ならば定数をひいて $u<0$ を仮定する。さらに $u(x_{k-1})$ は x_{k-1} の点で決まり，右辺の第２項は次式で評価される。

$$\begin{aligned}&-\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[2(u(x_k)-u(x_{k-1}))u(x_{k-1})|x_0,\dots,x_{k-1}]\\&\quad=-2u(x_{k-1})(\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[u(x_k)|x_0,\dots,x_{k-1}]\\&\qquad\qquad-u(x_{k-1}))\\&\quad\le 2\|u\|_\infty C_1\epsilon^3.\end{aligned}\tag{11}$$

最後の不等式は前と同様にして得られる。(9), (10) 式から

$$-\epsilon^2\alpha C_3^2/2+2\|u\|_\infty C_1\epsilon^3+C_2\epsilon^2\le 0.$$

のときに

$$\mathbb{E}_{S_1,S_2^0}[\tilde{M}_k-\tilde{M}_{k-1}|x_0,\dots,x_{k-1}]\le 0$$

を得る。上の式は例えば C_2 を $C_3\ge 2\sqrt{C_2/\alpha},\epsilon<C_2/(2\|u\|_\infty C_1)$ ととる。よって $\tilde{M}_k$ が優マルチンゲールになることが示された。優マルチンゲールに対する任意停止定理より

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^0}[\tilde{M}_{\tau\wedge k}]\le\tilde{M}_0=0$$

よって

$$C_2\epsilon^2\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^0}[\tau\wedge k]\le\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^0}[u(x_{\tau\wedge k})^2-u(x_0)^2].\tag{12}$$

u は Ω 内で有界で k の極限をとって示される。

3　*p*-harmonic function の同値性

ある開集合 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上の有界関数 u に対し p-Laplacian $\triangle_p$ $(1<p<\infty)$ は

$$\begin{aligned}\triangle_p u&=div(|Du|^{p-2}Du)\\&=|Du|^{p-2}\triangle u+<D(|Du|^{p-2},Du>\end{aligned}\tag{13}$$

と定義する。ここで $\triangle u=div(Du)$ は普通のラプラシアンを表す。$\triangle_\infty u=\langle<D^2u,Du>,Du\rangle=<\frac{1}{2}D(|Du|^2),Du>=\sum_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}u_{x_ix_j}$ とおくと

$$\triangle_p u=|Du|^{p-2}\{\triangle u+(p-2)|Du|^{-2}\triangle_\infty u\}\tag{14}$$

となる。ここでは u が p-harmonic function（調和関数）（粘性解の意味で）と $\triangle_p u=0$ は粘性解の意味で同値になることを示す。形式的に $(p-2)|Du|^{p-4}$ で割ると

$$\triangle_\infty u+\frac{|Du|^2\triangle u}{(p-2)}=0\tag{15}$$

$|Du|^2,|\triangle u|<\infty$ とし，$p\to\infty$ とすると $\triangle_\infty u=0.$ この方程式を満たす u を無限(∞)－調和関数という。

定義２：連続関数 u が粘性解の意味で次の式を満たすとは $\epsilon\to 0$ で

$$\begin{aligned}u(x)=\frac{\alpha}{2}\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x)}u+\inf_{\overline{B}_\epsilon(x)}u\}\\+\frac{\beta}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x)}u(y)dy+O(\epsilon^3)\end{aligned}\tag{16}$$

もし

(1)$\nabla u\neq 0$ かつ $u(x)=\phi(x)$ をもつ点 $x\in\Omega$ で $u-\phi$ が真に最小を持つすべての $\phi\in C^2$ に対して

$$\begin{aligned}0\ge-\phi(x)+\frac{\alpha}{2}\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x)}u+\inf_{\overline{B}_\epsilon(x)}u\}\\+\frac{\beta}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x)}u(y)dy+O(\epsilon^3)\end{aligned}\tag{17}$$

(2)$\nabla u \neq 0$ かつ $u(x)=\phi(x)$ をもつ点 $x\in\Omega$ で $u-\phi$ が真に最大を持つすべての $\phi\in C^2$ に対して

$$0\le -\phi(x)+\frac{\alpha}{2}\{\sup_{\overline{B}_\epsilon(x)} u+\inf_{\overline{B}_\epsilon(x)} u\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x)} u(y)\,dy+O(\epsilon^3) \tag{18}$$

定義3：$1<p<\infty$ に対し，$-\triangle_p u=0$ を考える。

(1)下半連続な関数 u が粘性優解であるとは，$\nabla u\neq 0$ をもつ点 $x\in\Omega$ で $u-\phi$ が真に最小を持つすべての $\phi\in C^2$ に対して

$$-(p-2)\triangle_\infty\phi(x)-\triangle\phi(x)\ge 0$$

(2)上半連続な関数 u が粘性劣解であるとは，$\nabla u\neq 0$ をもつ点 $x\in\Omega$ で $u-\phi$ が真に最大を持つすべての $\phi\in C^2$ に対して

$$-(p-2)\triangle_\infty\phi(x)-\triangle\phi(x)\le 0$$

(3)u が粘性解であるとは粘性優解かつ粘性劣解であるとき。

定理4：$1<p\le\infty$ とする。u を連続関数として定義2の粘性解と定義3の粘性解は同値になる。

証明の前に直観的考察を行う。u を滑らかな関数で $\nabla u\neq 0$ とする。(14)式から $\triangle u+(p-2)|Du|^{-2}\triangle_\infty u=0$ と $\triangle_p u=0$ が同値である。テイラー展開は

$$u(y)=u(x)+\nabla u(x)\cdot(y-x)+\frac{1}{2}\langle D^2u(x)(y-x),(y-x)\rangle+O(|y-x|^3)$$

これを $B_\epsilon(x)$ 上で積分して

$$\int_{B_\epsilon(x)} u(y)\,dy=u(x)|B_\epsilon| + \int_{B_\epsilon(x)}\nabla u(x)\cdot(y-x)\,dy + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}\int_{B_\epsilon(0)} z_i z_j\,dz+O(\epsilon^3) \tag{19}$$

右辺の第2項の積分は0となる。さらに第3項の積分は $i\neq j$ で0になり，対称性を使い

$$\int_{B_\epsilon(0)} z_i^2\,dz=\frac{1}{n}\int|z|^2dz=\frac{1}{n}\int_0^\epsilon\int_{\partial B_\rho}\rho^2\,dS\,d\rho = \frac{\sigma_{n-1}\epsilon^2}{n(n+2)}\epsilon^n=\frac{\epsilon^{2+n}\omega_n}{(n+2)} \tag{20}$$

よって

$$\frac{1}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x)} u(y)\,dy-u(x) = \frac{\epsilon^2}{2(n+2)}\triangle u(x)+O(\epsilon^3)$$

ここで ω^n は $\boldsymbol{R}^n$ 内の単位球の体積，σ_{n-1} は単位球面の面積を表す。また

$$\begin{aligned} u(x)-\frac{1}{2}\{\max_{\overline{B}_\epsilon(x)} u+\min_{\overline{B}_\epsilon(x)} u\} &\approx u(x)-\frac{1}{2}\left\{u\left(x+\epsilon\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right) + u\left(x-\epsilon\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right)\right\} \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2|\nabla u|^2}\triangle_\infty u(x)+O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{21}$$

ここで最後の等式はテイラー展開を使った。(19)式と(21)式から(16)式を得る。これらを粘性解の状況で行えばよい。

証明：$x\in\Omega$ をとり，x の近傍で定義された C^2 関数 ϕ をとる。x_1^ϵ と x_2^ϵ を ϕ が $\overline{B}_\epsilon(x)$ でそれぞれ最小，最大をとる点とする。すなわち

$$\phi(x_1^\epsilon)=\min_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y),\quad \phi(x_2^\epsilon)=\max_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)$$

x のまわりで ϕ のテイラー展開を考え，$|y-x|\to 0$ のとき

$$\phi(y)=\phi(x)+\nabla\phi(x)\cdot(y-x)+\frac{1}{2}\langle D^2\phi(x)(y-x),(y-x)\rangle+O(|y-x|^3)$$

これを $y=x_1^\epsilon$ と $y=2x-x_1^\epsilon=\tilde{x}_1^\epsilon$ として，$\epsilon\to 0$ のとき

$$\phi(x_1^\epsilon)=\phi+\nabla\phi(x)\cdot(x_1^\epsilon-x)$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon-x),(x_1^\epsilon-x)\right\rangle+O(\epsilon^3)$$
$$\phi(\tilde{x}_1^\epsilon)=\phi-\nabla\phi(x)\cdot(x_1^\epsilon-x)$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon-x),(x_1^\epsilon-x)\right\rangle+O(\epsilon^3)$$

よって

$$\phi(\tilde{x}_1^\epsilon)+\phi(x_1^\epsilon)-2\phi(x)$$
$$=\left\langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon-x),(x_1^\epsilon-x)\right\rangle+O(\epsilon^3).$$

x_1^ϵ は ϕ の最小の点なので,

$$\phi(\tilde{x}_1^\epsilon)+\phi(x_1^\epsilon)-2\phi(x)$$
$$\leq\max_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)+\min_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)-2\phi(x).$$

よって

$$\frac{1}{2}\{\max_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)+\min_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)\}-\phi(x)$$
$$\geq\frac{1}{2}\left\langle D^2\phi(x)(x_1^\epsilon-x),(x_1^\epsilon-x)\right\rangle+O(\epsilon^3). \tag{22}$$

同じ操作を x_2^ϵ に対しても行い次を得る。

$$\frac{1}{2}\{\max_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)+\min_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)\}-\phi(x)$$
$$\leq\frac{1}{2}\left\langle D^2\phi(x)(x_2^\epsilon-x),(x_2^\epsilon-x)\right\rangle+O(\epsilon^3). \tag{23}$$

直観的説明で u に対し行ったことを ϕ に対し行い

$$\frac{1}{|B_\epsilon(x)|}\int_{B_\epsilon(x)}\phi(y)\,dy-\phi(x)$$
$$=\frac{\epsilon^2}{2(n+2)}\triangle\phi(x)+O(\epsilon^3). \tag{24}$$

(22)に α, (24)に β をかけて加えると，任意の滑らかな ϕ に対し

$$\frac{\alpha}{2}\left(\max_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)+\min_{y\in\overline{B}_\epsilon(x)}\phi(y)\right)$$
$$+\frac{\beta}{|B_\epsilon(x)|}\int_{B\epsilon(x)}\phi(y)\,dy-\phi(x)$$
$$\geq\frac{\beta\epsilon^2}{2(n+2)}\left((p-2)\langle D^2\phi(x)\left(\frac{x_1^\epsilon-x}{\epsilon}\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{x_1^\epsilon-x}{\epsilon}\right)\rangle+\triangle\phi(x)\right)+O(\epsilon^3). \tag{25}$$

Remark：十分小さな ϵ に対し $\nabla\phi(x)\neq 0$ のとき $x_1^\epsilon\in\partial B_\epsilon(x)$。実際もしそうでなければ, ϕ の最小の部分列 $x_1^{\epsilon_j}$ が存在する。このとき $\nabla\phi(x_1^{\epsilon_j})=0$, そして $\epsilon_j\to 0$ のとき $x_1^{\epsilon_j}\to x$ なので連続性より $\nabla\phi(x)=0$ を得，矛盾。また

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{x_1^\epsilon-x}{\epsilon}=-\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}(x). \tag{26}$$

さて今 u が定義 2 の意味で粘性解とする。さらに定義 2 の(1)の状況を考える（粘性優解)。すなわち $u-\phi$ が x で真の最小をもつ（もし $p=\infty$ ならば　$\phi\in S(x)$）滑らかな関数 ϕ を考える。ここで $S(x)$ は C^2 関数で $\nabla\phi(x)\neq 0$ かまたは, $\nabla\phi(x)=0$ でかつ極限

$$\lim_{y\to x}\frac{2(\phi(y)-\phi(x))}{|y-x|^2}=\triangle_\infty\phi(x)$$

が存在するような空間とする。このとき(17)式，(25)式より

$$0\geq\frac{\beta\epsilon^2}{2(n+2)}\left((p-2)\langle D^2\phi(x)\left(\frac{x_1^\epsilon-x}{\epsilon}\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{x_1^\epsilon-x}{\epsilon}\right)\rangle+\triangle\phi(x)\right)+O(\epsilon^3).$$

もし $\nabla\phi(x)\neq 0$ ならば $\epsilon\to 0$ として次を得る。

$$0\geq\frac{\beta\epsilon^2}{2(n+2)}((p-2)\triangle_\infty\phi(x)+\triangle\phi(x)).$$

これは $1<p<\infty$ のとき定義 3 の(1)を意味している。$p=\infty$ のとき

$$\lim_{y\to x}\frac{\phi(y)-\phi(x)}{|y-x|^2}=L$$

が存在するとする。

$$0 \geq \frac{1}{2}\left\{\max_{\overline{B}_\epsilon(x)}\phi + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)}\phi\right\} - \phi(x)$$

から $L \leq 0$ を導く必要がある。矛盾により導く。今 $L > 0$ として十分小さな $\eta > 0$ をとり $L-\eta > 0$ とする。極限の条件から十分小さな $|x-y|$ に対し

$$(L-\eta)|x-y|^2 \leq \phi(x) - \phi(y) \leq (L+\eta)|x-y|^2.$$

よって

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2}\max_{\overline{B}_\epsilon(x)}(\phi-\phi(x)) + \frac{1}{2}\min_{\overline{B}_\epsilon(x)}(\phi-\phi(x)) \\ &\geq \frac{1}{2}\max_{\overline{B}_\epsilon(x)}(\phi-\phi(x)) \\ &\geq \left(\frac{L-\eta}{2}\right)\epsilon^2 \end{aligned} \tag{27}$$

これは矛盾。よって $L \leq 0$ が言えた。粘性劣解の時も同様に示すことができる。次は定理の逆の主張を示す。すなわち定義3の意味の粘性解から定義2の粘性解を示す。いま定義3の(2)を満たす ϕ をとる。($u-\phi$ が $x \in \Omega$ で最大をとるとする。) もし $\nabla\phi(x) \neq 0$ なら,

$$-(p-2)\triangle_\infty\phi(x) - \triangle\phi(x) \leq 0 \tag{28}$$

となりこれから，次を示せばよい。

$$\liminf_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\epsilon^2}\left(-\phi(x) + \frac{\alpha}{2}\{\max_{\overline{B}_\epsilon(x)}u + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)}u\} + \frac{\beta}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon(x)}u(y)\,dy\right) \geq 0$$

実際，(25)式を ϵ^2 で割り，(26)を使い(28)から目的の式を得る。$\nabla\phi(x) = 0$ で $p = \infty$ のときは

$$\lim_{y\to x}\frac{\phi(y)-\phi(x)}{|y-x|^2} = L \geq 0$$

の存在を仮定し,

$$\liminf_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\epsilon^2}\left(-\phi(x) + \frac{1}{2}\left\{\max_{\overline{B}_\epsilon(x)}\phi + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)}\phi\right\}\right) \geq 0$$

粘性劣解のときも同様に示す。$1 < p < 2$ の場合 $\alpha \leq 0$ より，x_1^ϵ に対する(22)の代わりに x_2^ϵ に対する(23)を使って同様に行う。

4　$p = \infty$ の場合

前節でも $p = \infty$ の場合を含んで，考えていたが, ここで $p = \infty$ のときを分けて整理する。Peres, Schramm, Sheffield, Wilson［6］は tug-of-war game と呼ばれる微分ゲームと ∞-Laplacian の関係を最初に導入した。(X, d) を距離空間とする。$Y \subset X$ に対し，リプシッツ関数 $F \to \boldsymbol{R}$ が与えられる。$E_\epsilon = \{x \sim y : d(x, y) < \epsilon\}$ を辺集合とする。u^ϵ を端利得 F をもち，E^ϵ 上でプレイされたゲームの値とする。　言い換えると $u^\epsilon(x)$ は次の2人ゼロ和ゲーム：ϵ-tug-of-war game の値である。: $x_0 = x \in X \setminus Y$ を固定する。k 番目でプレイヤーはコインを投げる。勝者は $d(x_k, x_{k-1}) < \epsilon$ となる x_k を選ぶ。ゲームは $x_k \in Y$ で終了し，プレイヤー1の利得は $F(x_k)$ となる。$u := \lim_{\epsilon\to 0} u^\epsilon$ が各点で存在するなら，u を (X, d, Y, F) の連続値と呼ぶ。

いま，X を $\boldsymbol{R}^n$ の有界開集合 Ω とし，$F : \partial\Omega \to \boldsymbol{R}$ を一様連続とする。このとき u は次の方程式の一意の連続な粘性解が存在する。

$$\frac{\triangle_\infty u}{|Du|^2} = 0 \text{ in } \Omega, \tag{29}$$

$$u|_{\partial\Omega} = F \tag{30}$$

$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon = u$ は tug-of-war game on $(\overline{U}, d, \partial U, F)$ の連続値である。
これは $B(x, \epsilon)$ 上でのゲームを考え，u^ϵ を期待値とする時，次式

$$u^\epsilon(x) = \frac{1}{2}\left(\max_{\partial B(x,\epsilon)}u^\epsilon + \min_{\partial B(x,\epsilon)}u^\epsilon\right) \tag{31}$$

から導かれる。もし $Du^{\epsilon}(x) \neq 0$ なら

$$\max_{\partial B(x,\epsilon)} u^{\epsilon} \approx u^{\epsilon}\left(x + \frac{\epsilon Du^{\epsilon}}{|Du^{\epsilon}(x)|}\right)$$
$$\min_{\partial B(x,\epsilon)} u^{\epsilon} \approx u^{\epsilon}\left(x - \frac{\epsilon Du^{\epsilon}}{|Du^{\epsilon}(x)|}\right). \tag{32}$$

これらを上式に代入して ϵ^2 で割って

$$\frac{1}{\epsilon^2}\left(u^{\epsilon}\left(x + \frac{\epsilon Du^{\epsilon}}{|Du^{\epsilon}(x)|}\right) + u^{\epsilon}\left(x - \frac{\epsilon Du^{\epsilon}}{|Du^{\epsilon}(x)|}\right) - 2u^{\epsilon}(x)\right) \approx 0 \tag{33}$$

テイラー展開により左辺は

$$\frac{1}{|Du^{\epsilon}|^2}\langle D^2 u^{\epsilon} \cdot Du^{\epsilon}, Du^{\epsilon}\rangle = \frac{1}{|Du^{\epsilon}|^2}\triangle_{\infty} u^{\epsilon} \approx 0$$

となり，ここで $\epsilon \to 0$ とすれば(29)を得る。

5　付録

ここでマルチンゲールの定義と任意停止定理を述べておく。

定義４：(X, F, P) を確率空間とし，確率変数の列

$$\{M_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty},\quad \omega \in X$$

が sub-σ　field　$F_k \subset F, k = 1, 2 \ldots$ に関してマルチンゲールであるとは，次の条件が成り立つことである。

(1)各確率変数 M_k は対応する σ-field F_k に関して可測であり，$\mathbb{E}(|M_k|) < \infty$.

(2)σ-field は増大列である。すなわち $F_k \subset F_{k+1}$.

(3)各確率変数に対して

$$\mathbb{E}[M_k | F_{k-1}] = M_{k-1} \ \textit{almost surely w.r.t.P}$$

さらに確率変数の列が優マルチンゲールであるとは(3)を

$$\mathbb{E}[Mk | F_{k-1}] \leq M_{k-1} \ \textit{almost surely w.r.t.P}$$

とする。また劣マルチンゲールは(3)を

$$\mathbb{E}[M_k | F_{k-1}] \geq M_{k-1} \ \textit{almost surely w.r.t.P}$$

次に任意停止定理を述べる。

定理：$\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ をマルチンゲール，τ を有界な停止時刻とする。この時

$$\mathbb{E}[M_{\tau}] = \mathbb{E}[M_0].$$

さらに優マルチンゲールに対しては

$$\mathbb{E}[M_{\tau}] \leq \mathbb{E}[M_0].$$

劣マルチンゲールに対しては

$$\mathbb{E}[M_{\tau}] \geq \mathbb{E}[M_0].$$

参考文献

[１] Evans, C., The 1-Laplacian, the ∞-Laplacian and differential games, Contemp. Math. 446 (2007) 245-254.

[２] Manfreidi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., An Asymptotic mean value characterization for p-harmonic functions, Proc. Amer. Math. Soc.., 138 (2010) 881-889. (8)

[３] Manfreidi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., An asymptotic mean value characterization for a class of nonlinear parabolic equations related to tug-of war games, SIAM J. Math. Anal. 42，No 5,（2010）2058-2081. (8)

[４] Manfreidi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., On the definition and properties of p-harmonious functions, Annali della Scuoula Normale Superiore di Pisa, Clase di Scienze. vol. XI (2), (2012) 215-241. (8)

[５] Manfreidi, J. J., Parviainen, Rossi, J. D., Dynamic programming principle for tug-of-war games with noise, preprint

[６] Peres, Y., Schramm, O., Sheffield, S., Wilson, D., Tug-of-war and the infinity Laplacian, J. Am. Math. Soc. 22 (1), (2009) 167-210.

[7] Rossi, J, D., Tug-of-war games that PDE peoples like to play, note, http : //mate.dm.uba/ jrossi