研究ノート

無限ラプラシアンとゲーム

竹 内　　博

Notes on the Infinity-Laplacian and Games

Hiroshi TAKEUCHI

ABSTRACT

In this paper, the infinity-Laplacian and games will be discussed.

KEYWORDS : Infinity-Laplacian

1　無限 Laplacian

ある開集合 $U \subset \boldsymbol{R}^n$ 上の有界関数 u に対し p-Laplacian $\triangle_p\,(1 < p < \infty)$ は

$$\begin{aligned}\triangle_p u &= div(|Du|^{p-2} Du) \\ &= |Du|^{p-2} \triangle u + < D(|Du|^{p-2}, Du > \end{aligned} \tag{1}$$

と定義する。ここで $\triangle u = div(Du)$ は普通のラプラシアンを表す。右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned}< D(|Du|^{p-2}), Du > &= (p-2)|Du|^{p-4} \\ &\quad \langle < DDu, Du >, Du \rangle \\ &= \frac{p-2}{2}|Du|^{p-4} \\ &\quad < D(|Du|^2), Du > \end{aligned} \tag{2}$$

となる。$\triangle_\infty u = \langle < DDu, Du >, Du \rangle = < \frac{1}{2}D(|Du|^2), Du > = \sum_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}$ とおくと

$$\triangle_p u = |Du|^{p-2} \triangle u + (p-2)|Du|^{p-4} \triangle_\infty u \tag{3}$$

となる。u が p-調和関数とは $\triangle_p u = 0$ と定義する。

(3)式を形式的に $(p-2)|Du|^{p-4}$ で割ると，$\triangle_p u = 0$ は次式になる。

$$\triangle_\infty u + \frac{|Du|^2 \triangle u}{(p-2)} = 0 \tag{4}$$

$|Du|^2, |\triangle u| < \infty$ とし, $p \to \infty$ とすると $\triangle_\infty u = 0$. この方程式を満たす u を無限 (∞)-調和関数という。

2　L^∞ 変分問題

ここでは L^∞ 変分問題の観点からみる。L^∞ 変分問題とは汎関数を

$$\|Du\|_{L^\infty(U)} = esssup_{x \in U} |Du|, u \in W^{1,\infty}(U, \boldsymbol{R}^m) \tag{5}$$

として考える。G. Aronsson[1] は1967年にLipschitz 拡張問題との関連でこの汎関数の研究を始めた。∂U で与えられた境界値をとり，この汎関数を最小化する問題を考えた。Euler-Lagrange 方程式は ∞-調和関数の方程式になる。これは p-調和関数の $p \to \infty$ とした場合に当たる。Aronsson はもし U が convex ならば $Lip(u, U) = \|Du\|_{L^\infty(U)}$ を示し，解の存在及び absolutely minimizing の概念も提案した。より正確に述べると，∂U 上の Lipschitz 連続関数 $g : \partial U \to \boldsymbol{R}$ に対し g を $\bar{U}$ に拡張することを考える。このとき拡張した関数の Lipschitz 定数をなるべく小さくする。この拡張

2010年10月22日受付，2011年 1 月19日最終受付
竹内　博　四国大学大学院経営情報学研究科
Hiroshi TAKEUCHI, Member (Graduate School of Management and Information Science, Shikoku Univ., Tokushima, 771-1192 Japan).
四国大学経営情報研究所年報　No. 16　pp. 49-55　2011年 2 月

した関数 $u:\bar{U}\to\boldsymbol{R}$ は U 内の任意の開有界部分集合 V と連続関数 $v\in C(\bar{V})$ に対し，∂V 上で $u=v$ でかつ $esssup_V|Du|\le esssup_V|Dv|$ を実現する。u は absolutely minimizing extension という。Euler-Lagrange 方程式は∞-調和関数となる。

$$
\begin{aligned}
-\triangle_\infty u &= 0\, in\, U\\
u &= g\, on\, \partial U
\end{aligned}
\tag{6}
$$

1993年 Jensen[8]により U が有界，開，連結集合で，$g\in C(\partial U)$ の時，この Dirichlet 問題は一意の粘性解を持つことが示された。さらに同値な概念として Comparison with cone の概念が2001年 Crandall，Evans，and Gariepy[4]により導入された。より一般の汎関数への拡張が1999年，2001年に Barron，Jensen，and Wang[3]によりなされ，Euler-Lagrange 方程式が考察された。より詳しく，汎関数 F を $p=Du$ とおいて次で考える。

$$
\begin{aligned}
F(u) &= esssup_{x\in U}f(x,u(x),Du(x))\\
&= esssup_{x\in U}f(x,u,p),x\in U
\end{aligned}
\tag{7}
$$

on $W_g^{1,\infty}(U,\boldsymbol{R}^m)$ とおく。ここで $W_g^{1,\infty}(U,\boldsymbol{R}^m)=\{u:U\to\boldsymbol{R}^m:u\in W^{1,\infty}(U,\boldsymbol{R}^m),u-g\in W_0^{1,\infty}(U,\boldsymbol{R}^m)\}$，また $f:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^{nm}\to\boldsymbol{R}$ で f は連続，また $p\to f(x,u,p)$ は quasiconvex，定数 C_1,C_2,C_3，$0<q\le r<\infty$ と正の有界関数 $a:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\to[0,\infty]$ が存在して

$$
C_1|A|^q-C_2\le f(x,u,A)\le a(x,u)|A|^r+C_3 \tag{8}
$$

ならば，(1) $m=1$ のとき $W_g^{1,\infty}(U,\boldsymbol{R}^m)$ 上に absolute　minimizer が存在する。(2) $n=1,m>1$ かつ，$C_2=C_3=0$ のとき，$W_g^{1,\infty}(U,\boldsymbol{R}^m)$ に absolute minimizer が存在する。この時，Euler-Lagrange 方程式は

$$
D_xf(x,u(x),Du(x))f_p(x,u(x),Du(x))=0, \tag{9}
$$

となる。ここで関数 f が quasiconvex とは集合 $\{f<t\}$ がすべての t に対して convex のときをいう。

∞-調和関数の regularity は C^1，$C^{1,\alpha}$ については2次元について Evans，Savin[11],[6]により示されている。

3　Lipschitz extension problem

(X,d) を距離空間とし，Y を X の部分集合，$u:X\to\boldsymbol{R}$ を関数とし，$Lip(u,Y)=\inf\{L\in\boldsymbol{R};|u(y)-u(x)|\le Ld(x,y),\forall x,y\in Y\}$ と定義する。以下，とくに Y が X の境界の時を多く考える。$Lip\,u=Lip(u,X)$ と書く。u が Lipschitz であるとは $Lip\,u<\infty$。$F:Y\to\boldsymbol{R}$ を与えて，u が F の Lip-schitz ex-tension であるとは $Lip(u,X)=Lip(F,Y)$ で $u(y)=F(y)$ for all $y\in Y$ が成り立つ時をいう。今 F を与えて，$Lip(u,X)$ を小さくする問題を考える。一般に $Lip(F,Y)\le Lip(u,X)$ より等号成立の場合が $Lip(u,X)$ の最小を与える。$Lip(F,Y)<\infty$，$Lip(u,Y)=Lip(u,X)$ ならば解 u がある。実際 $Lip(u,Y)=Lip(u,X)$ とし，u を任意の解とすると $z,y\in Y,x\in X$ なら

$$
\begin{aligned}
\frac{F(z)-u(x)}{d(x,z)}=\frac{u(z)-u(x)}{d(x,z)} &\le Lip(u,X)\\
&= Lip(u,Y)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\frac{u(x)-F(y)}{d(x,y)}=\frac{u(x)-u(y)}{d(x,y)} &\le Lip(u,X)\\
&= Lip(u,Y)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
\sup_{z\in Y}(F(z)-Lip(u,Y)d(x,z)) &\le u(x)\\
&\le \inf_{y\in Y}(F(y)+Lip(u,Y)d(x,y))
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(12)の左辺 $\Lambda(F)(x):=\sup_{y\in Y}[F(y)-Lip(u,Y)d(x,y)]$ は最小の Lipschitz　extension となり，右辺 $\Psi(F)(x):=\inf_{y\in Y}[F(y)+Lip(u,Y)d(x,y)]$ は最大の Lipschitz extension となる。すなわち Lipschitz extension 問題の解は一意でない。

定義：$u:X\to \boldsymbol{R}$ が absolute minimizer for the functional Lip（略して AML）on X とは $Lip\,u<\infty$ でかつすべての開集合 $U\subset X\setminus Y$ に対して $u\in C(X)$ かつ $Lip(u,U)=Lip(u,\partial U)$ が成り立つときをいう。

定義：$w\in C(U)$ が $\triangle_\infty w=0$ の粘性劣解（viscosity subsolution）または viscosity solution of $\triangle_\infty w\geq 0$ の意味で∞-subharmonic とはすべての $\varphi\in C^2(U)$ にたいし，$w-\varphi$ が local maximum at $\hat{x}\in U$ なら $\triangle_\infty\varphi(\hat{x})\geq 0$。$-w$ が∞-subharmonic のとき w は∞-superharmonic という。w が∞-subharmonic かつ∞-superharmonic のとき∞-harmonic という。この定義を言い換えると，∞-subharmonic とは $V\subset U,\ v\in C^2(V),\ \triangle_\infty v(x)<0$ for $x\in V$ ならば $u-v$ does not have any local maximum point in V。例として $u(x,y)=x^{4/3}-y^{4/3}$ は $\triangle_\infty u=0$ in $\boldsymbol{R}^2$ の viscosity solution である。

定理：次は同値となる。$U\subset\boldsymbol{R}^n, u\in C(U)$ として

(a) $u\in AML(U)$

(b) もし $w=u$ または $w=-u$ ならば，すべての $a\in\boldsymbol{R}$，$V\ll U(\bar{V}$：compact subset in $U), z\notin V$ に対し，

$$w(x)-a|x-z|\leq\max_{y\in\partial V}(w(y)-a|y-z|)\quad\text{for } x\in V \tag{13}$$

(c) $w=u$ または $w=-u$ として，すべての $\varphi\in C^2(U)$ に対して，$w-\varphi$ が local maximum を $\hat{x}\in U$ で持つなら

$$\triangle_\infty\varphi(\hat{x})=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{x_i}(\hat{x})\varphi_{x_j}(\hat{x})\varphi_{x_ix_j}(\hat{x})\geq 0 \tag{14}$$

(13)の条件をもつ w は enjoy comparison with cone from abobe in U（略して CCA(U)）という。もし $-w$ が CCA（U）のとき w は enjoy comparison with cone from below in U（略して CCB(U)）という。w が CCA(U) かつ CCB(U) のとき comparison with cone in U（略して CC(U)）という。(b)の条件は CC(U) となる。

CCA(U) の条件は次のように書ける。もし $a,c\in\boldsymbol{R},z\notin V$ に対し，$u(x)\leq c+a|x-z|$ for $x\in\partial V$ ならば $u(x)\leq c+a|x-z|$ for $x\in V$。

（証明）：(a)→(b)を示す。$u\in AML(U)$ とし，$V\ll U,\ z\in V$ に対し，$W=\{x\in V:u(x)-a|x-z|>\max_{w\in\partial V}(u(w)-a|w-z|\}$ とおく。W が空集合であることを示す。いま空集合でないとすると W は開集合であり $x\in\partial W$ のとき，$u(x)=a|x-z|+\max_{w\in\partial V}(u(w)-a|w-z|):=C(x)$。$u\in AML(U)$ より $Lip(u,W)=Lip(C,\partial W)=|a|$。$x_0\in W$ として x_0 を通る C の半直線は，$t\to z+t(x_0-z)$, $t\geq 0$ で W 内に x_0 を含み端点で ∂W と交わる。$t\to C(z+t(x_0-z))=at|x_0-z|$ はこの線分上で線形で，傾き $a|x_0-z|$ となる。いっぽう $t\to u(z+t(x_0-z))$ も Lipschitz 定数が $|a||x_0-z|$ で端点で同じ値をもつので，この線分上で同じ関数となる。$u(z+t(x_0-z))=C(z+t(x_0-z)), x_0\in\partial W$。これは x_0 を含むので $x_0\in W$ に矛盾する。

(b)→(a)を示す。$u(z)-Lip(u,\partial V)|x-z|\leq u(x)\leq u(z)+Lip(u,\partial V)|x-z|$ for $x,z\in\partial V\ll U$ と(b)の仮定より不等式は $x\in V$ でも成立する。これは $\forall x\in V$ に対し $Lip(u,\partial(V\setminus\{x\})=Lip(u,\partial V\cup\{x\})=Lip(u,\partial V)$ を示した。これを2回使って $Lip(u,\partial V)=Lip(u,\partial(V\setminus\{x,y\})$ for $x,y\in V$ よって $|u(x)-u(y)|\leq Lip(u,\partial V)|x-y|$ を示したので $Lip(u,V)=Lip(u,\partial V)$。

(b)→(c) を示す。CCA(U) から $\triangle_\infty u\geq 0$ をいう。$x\in\partial(B_r(y)\setminus\{y\})$ では

$$u(x)\leq u(y)+\max_{\{w;|w-y|=r\}}\left(\frac{u(w)-u(y)}{r}\right)|x-y| \tag{15}$$

が明らかに成立する。仮定から CCA(U) であるので $x\in B_r(y)\ll U$ に対して成立する。これを書き直して $x\in B_r(y)\ll U$ に対し

$$u(x)-u(y)\leq\max_{\{w:w-y=r\}}(u(w)-u(x))\frac{|x-y|}{r-|x-y|} \tag{16}$$

もし u が x で2回微分可能，すなわち

$$u(z)=u(x)+<p,z-x> +\frac{1}{2}<X(z-x),z-x> +o(|z-x|^2) \tag{17}$$

$$p=Du(x),X=D^2u(x) \tag{18}$$

となる $p\in\boldsymbol{R}^n$ と対称 $n\times n$ 行列 X が存在するなら，

$$\triangle_\infty u(x)=<D^2u(x)Du(x),Du(x)> =<Xp,p>\geq 0 \tag{19}$$

を示す。$z=y=x-\lambda p$ とおくと(17)は

$$\begin{aligned}u(y)&=u(x-\lambda p)\\&=u(x)-\lambda|p|^2+\frac{1}{2}<X(-\lambda p),-\lambda p>\\&\quad+o(1-|\lambda p|^2)\\&=u(x)-\lambda|p|^2+\frac{1}{2}\lambda^2<Xp,p>+o(|\lambda p|^2)\end{aligned} \tag{20}$$

最大を実現する w を $w_{r,\lambda}$ とし

$$\begin{aligned}u(x)-u(y)&\leq\max_{\{w:w-y=r\}}(u(w)-u(x))\frac{|x-y|}{r-|x-y|}\\&\leq(u(w_{r,\lambda})-u(x))\frac{|x-y|}{r-|x-y|}\end{aligned} \tag{21}$$

ここで $z=w_{r,\lambda}$ として(17)に適用して

$$u(w_{r,\lambda})=u(x)+<p,w_{r,\lambda}-x> +\frac{1}{2}<X(w_{r,\lambda}-x),w_{r,\lambda}-x> +o(|w_{r,\lambda}-x|^2) \tag{22}$$

(21)と(22)を組み合わせて

$$\begin{aligned}u(x)-u(y)&=\lambda|p|^2-\frac{1}{2}\lambda^2<Xp,p>-o(|\lambda p|^2)\\&\leq\Big(<p,w_{r,\lambda}-x>+\frac{1}{2}<X(w_{r,\lambda}-x),\\&\quad w_{r,\lambda}-x>+o(|w_{r,\lambda}-x|^2\Big)\frac{|\lambda p|}{r-|\lambda p|}\end{aligned} \tag{23}$$

両辺を λ で割ると

$$\begin{aligned}&|p|^2-\frac{1}{2}\lambda<Xp,p>-o(\lambda)\\&\leq\Big\{<p,w_{r,\lambda}-x>+\frac{1}{2}<X(w_{r,\lambda}-x),w_{r,\lambda}-x>\\&\quad+o(|w_{r,\lambda}-x|^2)\Big\}\frac{|p|}{r-|\lambda p|}\end{aligned} \tag{24}$$

$\lambda\to 0$ とすると $w_r=\lim_{\lambda\to 0}w_{r,\lambda}\in\partial B_r(x)$ となり $(w_r-x)/r$ は単位ベクトルとなる。

$$\begin{aligned}|p|^2&\leq\Big(<p,\frac{w_r-x}{r}>\\&\quad+\frac{1}{2}<X\left(\frac{w_r-x}{r}\right),w_r-x>\Big)|p|+|p|o(r)\\&\leq|p|^2+\frac{1}{2}<X\left(\frac{w_r-x}{r}\right),\\&\quad w_r-x>|p|+|p|o(r)\end{aligned} \tag{25}$$

$r\to 0$ のとき $(w_r-x)/r\to p/|p|$ より $0\leq<Xp,p>$ を得る。

次に2回微分可能でないとする。もし x が $u-\varphi$ の最大点だとする。φ は滑らかな関数とする。この時 x の近傍の y,w で

$$\begin{aligned}u(x)-u(y)&\geq\varphi(x)-\varphi(y)\\u(w)-u(x)&\leq\varphi(w)-\varphi(x)\end{aligned} \tag{26}$$

(16)の u を φ にして $\triangle_\infty\varphi(x)\geq 0$ を得る。すなわち u は粘性劣解となる。

(c)→(b)を示す。とくに粘性解の意味で $\triangle_\infty u\geq 0$ なら CCA(U) をいう。背理法で示す。すなわち CCA(U) でないとする。$V\ll U$ と $C(x)=a|x-z|+b, z\in V$ such that $u\leq C$ on $\partial V, u>C$ in V が存在する。C に小さい定数を加えて ∂V で $u<C$ と仮定する。よって

$$\begin{aligned}&u<C \text{ on } \partial V\\&\{x\in V;u(x)>C(x)\}\neq\emptyset\end{aligned} \tag{27}$$

もし任意の $\epsilon>0$ に対し次の $P\in C^2(\bar{V})$ such that

$$|P| \le \epsilon \qquad inV,$$
$$\triangle_\infty (C+P) \le -\delta < 0 \quad \text{in} V \tag{28}$$

が存在すれば矛盾。実際$|P| \le \epsilon$より(27)は$u-(C+P)$の$\bar{V}$での最大はVで達成していることを示している。一方(28)から$\varphi = C+P$として$\triangle_\infty u \ge 0$であることと矛盾する。Pの構成は$P := -\gamma|x-z|^2, \gamma > 0$とすると

$$C(x)+P(x) = G(|x-z|) \text{ where } G(s) = as - \gamma s^2 + b \tag{29}$$

$$\triangle_\infty G(|x-z|) = G''(|x-z|)G'(|x-z|)^2 \tag{30}$$

よって
$$\triangle_\infty (C+P)(x) = -2\gamma(2\gamma|x-z|-a)^2 \tag{31}$$

これは$a \le 0$または$a > 0$で$0 < \gamma$十分小なら負となる。もしγが十分小さければ$|P| \le \epsilon$は保たれる。

4　Tug-of-war game

Peres，Schramm，Sheffield，Wilson[10]はTug-of-warと呼ばれる微分ゲームと∞-Laplacianの関係を導入した。まず，random turn gameを説明する。集合Xをgameの状態とし，E_1, E_2を点Xをもつ向きづけられた２つの遷移グラフとする。$Y \subset X$を端状態（吸収状態）とし，端での支払い関数$F: Y \to \boldsymbol{R}$とし，走行中支払い関数$f: X \setminus Y \to \boldsymbol{R}$，初期状態$x_0 \in X$とする。ゲームは以下のように行う。しるし（token）が初期状態x_0である。k番目のステップでコインを投げ，勝ったプレイヤーは遷移グラフの向きづけられた辺（x_{k-1}, x_k）によりx_kに達する。ゲームは最初に$x_k \in Y$に到達したとき終了する。そしてプレイヤー１の利得は$F(x_k) + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)$である。プレイヤー１はそれを最大化しようとし，プレイヤー２はそれを最小化しようとするゼロ和ゲームである。

次にtug-of-war gameについて説明する。$E := E_1 = E_2$として向きのないグラフとする。もっとも簡単なゲームとして$Y = Y^1 \cup Y^2$とし，$f = 0$（走行中の支払いなし），$F = 1$ on $Y^1, F = 0$ on Y^2。プレイヤー達はそれぞれの目標Y^1, Y^2にゲームのしるしをもっていこうとする。ゲームは目標に達すると終了する。プレイヤーの戦略は以前に行った動き及び以前のコイン投げの関数としてプレイヤーの次の動きが選ばれる方法である。マルコフ過程を考える。すなわち今の状態から次の状態への写像とする。２つの戦略をS_1, S_2として$F_-(S_1, S_2)$と$F_+(S_1, S_2)$をゲームが終了した時点での期待利得とする。有限でなければ$F_-(S_1, S_2) = -\infty$と$F_+(S_1, S_2) = +\infty$とする。プレイヤー１のゲームの値は$u_1(x) = \sup_{S_1} \inf_{S_2} F_-(S_1, S_2)$，プレイヤー２のゲームの値は$u_2(x) = \inf_{S_1} \sup_{S_2} F_+(S_1, S_2)$と定義する。ここで$x$は出発点を表す。またプレイヤー１がほとんど確実に端点に到達しないとき$u_1 = -\infty$，プレイヤー２がほとんど確実に端点に達しないとき$u_2 = \infty$とする。明らかに$u_1(x) \le u_2(x)$。$u_1(x) = u_2(x)$のときにゲームは値を持つといい，$u(x) := u_1(x) = u_2(x)$と書く。

定理：関数$u = u_1$は次を満たす。すべての$x \in X \setminus Y$に対し

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\sup_{y:(x,y)\in E_1} u(y) + \inf_{y:(x,y)\in E_2} u(y)\right) + f(x) \tag{32}$$

右辺が定義されないとき，i. e. $\frac{1}{2}(\infty + (-\infty)) + f(x)$のとき$u_1(x) = -\infty$とする。$u_2$も同様に成り立つ。ただし$\frac{1}{2}(\infty + (-\infty)) + f(x)$のとき$u_2(x) = +\infty$とする。

$E = E_1 = E_2$のとき，作用素，無限ラプラシアンを

$$\triangle_\infty u(x) = \sup_{y:(x,y)\in E} u(y) + \inf_{y:(x,y)\in E} u(y) - 2u(x) \tag{33}$$

とする。関数uが無限調和関数とはすべての$x \in X \setminus Y$で(32)が成立し，かつ$f = 0$。uが有限の

とき $\triangle_\infty u=0$ となる。もし $u(x)=+\infty$ で(32)の右辺も $+\infty$ ならば u は無限調和関数という。tug-of-war game で 値 $u=u_1=u_2$ は 存 在 し，$\triangle_\infty u(x)=-2f(x)|Du|^2$ の一意な解であると予想するのは自然であろう。またプレイヤー１の最適な戦略は $u(x)$ を最大化する頂点に移動し，プレイヤー２の最適な戦略は $u(x)$ を最小化する頂点に移動することになる。

定理：パラメター (X,E,Y,F,f) をもつtug-of-gameは次の条件があるとき値をもつ。

(1) $f=0$　everywhere または $\inf f>0$

(2) $\inf F>-\infty$。

(3) E が向きづけられてない。

これらの一つが満たされていないとき反例がある。

5　距離空間上の tug-of-war game

(X,d) を距離空間とする。$Y\subset X$ に対し，リプシッツ関数 $F:Y\to\boldsymbol{R}$ と $f:X\setminus Y\to\boldsymbol{R}$ が与えられる。$E_\epsilon=\{x\sim y:d(x,y)<\epsilon\}$ を辺集合とする。u^ϵ を端利得 F をもち，走行中支払い利得を $\epsilon^2 f$ とする E^ϵ 上でプレイされたゲームの値とする。言い換えると $u^\epsilon(x)$ は次の２人ゼロ和ゲーム ϵ-tug-of-war　game の値である。$x_0=x\in X\setminus Y$ を固定する。k 番目でプレイヤーはコインを投げる。勝者は $d(x_k,x_{k-1})<\epsilon$ となる x_k を選ぶ。ゲームは $x_k\in Y$ で終了し，プレイヤー１の利得は $F(x_k)+\epsilon^2\sum_{i=0}^{k-1}f(x_i)$ となる。

$u:=\lim_{\epsilon\to 0}u^\epsilon$ が各点で存在するなら，u を (X,d,Y,F,f) の連続値と呼ぶ。

定理：X を length 空間，$Y\subset X$ は空でなく，$F:Y\to\mathbf{R}$ を下に有界で，X 全体に拡張できるとする。また $f:X\setminus Y\to\mathbf{R}$ は $f=0$ かつぎの３つの条件が成り立つ。$\inf|f|>0, f$ は一様に連続，X は有限直径をもつ。

このとき連続値 u が存在し，u は F を拡張する一様連続関数である。さらに $\|u-u^\epsilon\|_\infty\to 0$ as $\epsilon\to 0$。もし F が Lipschitz なら u も Lipschitz。もし F,f が Lipschitz なら $\|u-u^\epsilon\|_\infty=O(\epsilon)$。

いま，X を $\boldsymbol{R}^n$ の有界開集合 Ω とし，$F:\partial\Omega\to\boldsymbol{R}$ を一様連続とする。このとき，もし $f:U\to\boldsymbol{R}$ が一様連続で $f=0$ または $\inf f>0$，このとき u は次の方程式の一意の連続な粘性解が存在する。

$$\frac{\triangle_\infty u}{|Du|^2}=-2f\ \mathrm{in}\ \Omega, \tag{34}$$

$$u|_{\partial\Omega}=F \tag{35}$$

$\lim_{\epsilon\to 0}u_\epsilon=u$ は tug-of-war on $(\overline{U},d,\partial U,F,f)$ の連続値である。

これは $B(x,\epsilon)$ 上でのゲームを考え，u^ϵ を期待値とする時，次式

$$u^\epsilon(x)=\frac{1}{2}\Big(\max_{\partial B(x,\epsilon)}u^\epsilon+\min_{\partial B(x,\epsilon)}u^\epsilon\Big)+f(x) \tag{36}$$

から導かれる。もし $Du^\epsilon(x)\neq 0$ なら

$$\begin{aligned}\max_{\partial B(x,\epsilon)}u^\epsilon &\approx u^\epsilon(x+\epsilon Du^\epsilon/|Du^\epsilon(x)|)\\ \min_{\partial B(x,\epsilon)}u^\epsilon &\approx u^\epsilon(x-\epsilon Du^\epsilon/|Du^\epsilon(x)|).\end{aligned} \tag{37}$$

これを代入して

$$u^\epsilon(x+\epsilon Du^\epsilon/|Du^\epsilon(x)|)+u^\epsilon(x-\epsilon Du^\epsilon/|Du^\epsilon(x)|)-2u^\epsilon(x)+2f(x)\approx 0 \tag{38}$$

ϵ^2 で割って $\epsilon\to 0$ とすれば良い。

6　Kohn and Serfaty のゲーム

U を $\boldsymbol{R}^2$ の有界集合とする。最初 $x\in U$ にいてゴールは U の境界に達することである。プレイヤーⅠは期待利得を最小化しようとする。一方プレイヤーⅡは期待利得を最大化しようとする。プレイは以下のように行う。[9]

step１．各時刻 $t_k=k\epsilon^2$ でプレイヤーⅠは単位ベクトル $v\in\boldsymbol{R}$ を選ぶ。

step２．プレイヤーⅡは $b\in\{1,-1\}$ を選び今の場所から $x_{k+1}=x_k+\sqrt{2}\epsilon bv$ に移動する。

step３．ゲームは $x^*=x_{k+1}\notin U$ で終了する。そして期待利得は U 内にとどまる時間とする。

プレイヤーⅠは出来るだけ早く U から出たい，一方プレイヤーⅡはこれをできるだけ邪魔する。$u^\epsilon(x)$ を期待値とする。次を満たす。

$$u^\epsilon(x)=\min_{|v|=1}\max_{b=\pm 1}\{\epsilon^2+u^\epsilon(x+\sqrt{2}\epsilon bv)\} \tag{39}$$

$\epsilon\to 0$ として，もし $Du^\epsilon\neq 0$ なら，プレイヤーⅠは $v=\pm Du^\epsilon(x)^\perp/|Du^\epsilon(x)|$（$Du^\epsilon(x)$ に直交する単位ベクトル）を選ぶ。関数方程式は

$$\max_{b=\pm 1}\{\epsilon^2+u^\epsilon(x+\sqrt{2}\epsilon bDu^\epsilon(x)^\perp/|Du^\epsilon(x)|)\} \\ -u^\epsilon(x)=0 \tag{40}$$

となる。Taylor 展開により，

$$\max_{b=\pm 1}\{\epsilon^2+\frac{b^2}{|Du^\epsilon(x)|^2}<Du^\epsilon(x)^\perp, \\ D^2u^\epsilon(x)Du^\epsilon(x)^\perp>\}\approx 0. \tag{41}$$

$u^\epsilon\to u$ を仮定して，ϵ^2 で割り　$\epsilon\to 0$ とすると

$$-\frac{1}{|Du|^2}<Du^\perp, D^2uDu^\perp>=1 \tag{42}$$

$n=2$ の時，

$$-|Du|\triangle_1 u=1 \text{ in } U \\ u=0 \text{ on } \partial U$$

ここで

$$\triangle_1 u=div\left(\frac{Du}{|Du|}\right)=\frac{1}{|Du|}\left(\delta_{ij}-\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{|Du|^2}\right)u_{x_ix_j}$$

は 1-Laplacian である。

参考文献

[1] Aronsson, G., Extension of functions satisfying Lipschitz conditions, Ark. Mat. 6 (1967) 551-561.

[2] Aronsson, G., Crandall, M. and Juutinen, P., A tour of the theory of absolutely minimizing functions, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (2004) no. 4,439-505.

[3] Barron, E. N. Jensen, R. R. and Wang, C. Y., The Euler equation and absolute minimizers of L^∞ functionals, Arch. Ration. Mech. Ana. 157 (2001) no. 4, 255-283.

[4] Crandall, M. G., Evans, L. C. and Gariepy, R. F., Optimal Lipschitz extensions and the infinity Laplacian, Calc. Var. Partial Differential Equations 13 (2001) 123-139.

[5] Crandall, M., A visit with the ∞-Laplace equation, in Calculus of variations and Non-Linear Partial Differential Equations. (Lecture Notes in Math. vol 1927. (2008) 75-122.

[6] Evans, C. Savin, O., $C^{1,\alpha}$ regularity for infinity harmonic functions in two dimensions, Cal. Var. Partial Differential Equations 32 (2008) 325-347.

[7] Evans, C., The 1-Laplacian, the ∞-Laplacian and differential games, Contemp. Math. 446 (2007) 245-254.

[8] Jensen, R. R, Uniquness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient, Arch. Rational Mech. Anal. 123 (1993) 51-74.

[9] Kohn, R., Serfaty, S., A deterministic control-based approach to motion by mean curvature, Comm. Pure appl. math., 59 (2006) 344-407.

[10] Peres, Y., Schramm, O., Sheffield, S., Wilson, D., Tug-of-war and the infinity Laplacian, J. Am. Math. Soc. 22 (1), (2009) 167-210.

[11] Savin, O. C^1 regularity for infinity harmonic functions in two dimensions, Arch. Rational Mech. Anal. 176 (2005) 351-361.